Classificazione di fibrati vettoriali complessi

Relatore:
Prof. Filippo Callegaro

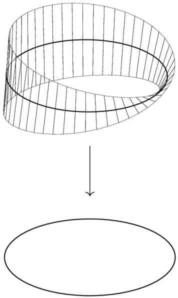
Candidato:
Leonardo Migliorini

Università di Pisa

30 settembre 2024

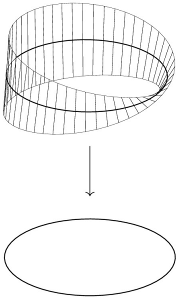
Un *fibrato* è uno spazio che è localmente un prodotto $U \times F$.

Un *fibrato* è uno spazio che è localmente un prodotto $U \times F$.



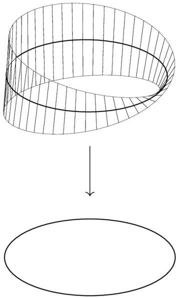
Un *fibrato* è uno spazio che è localmente un prodotto $U \times F$.

- Pullback.



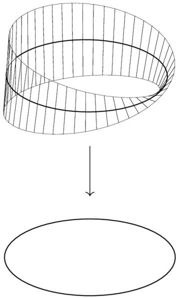
Un *fibrato* è uno spazio che è localmente un prodotto $U \times F$.

- Pullback.
- Classe di Eulero.



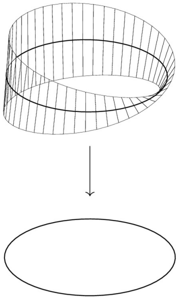
Un *fibrato* è uno spazio che è localmente un prodotto $U \times F$.

- Pullback.
- Classe di Eulero.
- Classi di Chern.



Un *fibrato* è uno spazio che è localmente un prodotto $U \times F$.

- Pullback.
- Classe di Eulero.
- Classi di Chern.
- Teorema di classificazione.



- $\pi : E \longrightarrow M$.

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[d] \\
M
\end{tikzcd}
$$

- $\pi : E \longrightarrow M$.
- $f : N \longrightarrow M$.

$$
\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d] \\
N \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}
$$

- $\pi : E \longrightarrow M$.
- $f : N \longrightarrow M$.

f induce un fibrato *pullback* $f^{-1}E$ su N.

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

- $\pi : E \longrightarrow M$.
- $f : N \longrightarrow M$.

f induce un fibrato *pullback* $f^{-1}E$ su N.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Pullback

- $\pi : E \longrightarrow M$.
- $f : N \longrightarrow M$.

f induce un fibrato *pullback* $f^{-1}E$ su N.

$$\begin{tikzcd} f^{-1}E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ N \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

Mappe omotope inducono pullback isomorfi.

- $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ buon ricoprimento di M.

- $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ buon ricoprimento di M.
- $\Omega^k(U) = \{k\text{-forme differenziali su } U\}$.

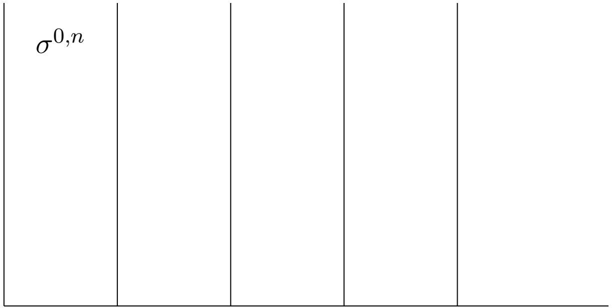
- $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ buon ricoprimento di M.
- $\Omega^k(U) = \{k\text{-forme differenziali su } U\}$.

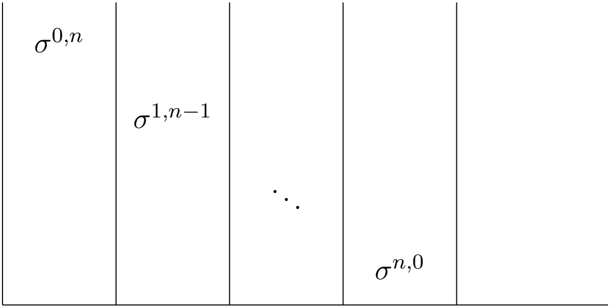
$$
\begin{array}{ccc|c|c|c}
0 \longrightarrow & \Omega^2(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^2(U_\alpha) & \prod \Omega^2(U_{\alpha_0\alpha_1}) & \prod \Omega^2(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\
0 \longrightarrow & \Omega^1(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^1(U_\alpha) & \prod \Omega^1(U_{\alpha_0\alpha_1}) & \prod \Omega^1(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\
0 \longrightarrow & \Omega^0(M) & \xrightarrow{r} & \prod \Omega^0(U_\alpha) & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1}) & \prod \Omega^0(U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}) \\
\hline
 & & & \uparrow i & \uparrow i & \uparrow i \\
 & & & C^0(\mathcal{U},\mathbb{R}) & C^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) & C^2(\mathcal{U},\mathbb{R}) \\
 & & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & & & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

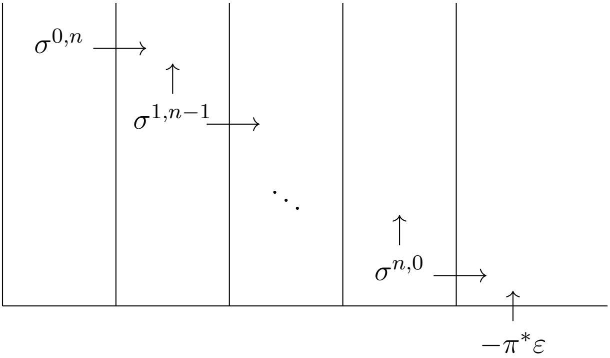
- Sia E^0 l'insieme dei vettori non nulli di E.

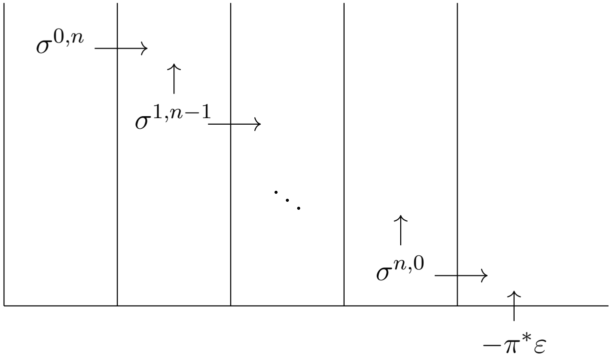
- Sia E^0 l'insieme dei vettori non nulli di E.
- Le fibre di $\pi^0 : E^0 \longrightarrow M$ sono omotopicamente equivalenti a S^{2n-1}.

- Sia E^0 l'insieme dei vettori non nulli di E.
- Le fibre di $\pi^0 : E^0 \longrightarrow M$ sono omotopicamente equivalenti a S^{2n-1}.
- Un'orientazione $\sigma^{0,n} = \{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ di $\pi^0 : E^0 \longrightarrow M$ è una scelta coerente di generatori della coomologia della fibra.


$\sigma^{0,n}$


$\sigma^{0,n}$
$\sigma^{1,n-1}$
$\ddots$
$\sigma^{n,0}$


$\sigma^{0,n}$
$\sigma^{1,n-1}$
$\sigma^{n,0}$
$-\pi^*\varepsilon$



$$\varepsilon \longleftrightarrow e(E) \in H^n(M)$$

La classe $e(E)$ è la *classe di Eulero*.

La classe $e(E)$ è la *classe di Eulero*.

- $e(f^{-1}E) = f^* e(E)$

La classe $e(E)$ è la *classe di Eulero*.

- $e(f^{-1}E) = f^*e(E)$
- $e(E \oplus F) = e(E)e(F)$

Esempio.

$$S \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

Esempio.

$$S \longrightarrow \mathbb{CP}^n$$

La classe di Eulero $e(S)$ genera $H^2(\mathbb{CP}^n)$.

Esempio.

$$S \quad \longrightarrow \quad \mathbb{CP}^n$$

La classe di Eulero $e(S)$ genera $H^2(\mathbb{CP}^n)$.

$$H^*(\mathbb{CP}^n) = \mathbb{R}[x]/(x^{n+1}), \qquad x \longleftrightarrow e(S)$$

Definizione.

Sia E un fibrato vettoriale complesso su una varietà M. La sua *proiettivizzazione* è il fibrato $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow M$ con fibra lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(E)_p = \mathbb{P}(E_p)$.

Definizione.

Sia E un fibrato vettoriale complesso su una varietà M. La sua *proiettivizzazione* è il fibrato $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow M$ con fibra lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(E)_p = \mathbb{P}(E_p)$.

Anche su $\mathbb{P}(E)$ si ha un fibrato universale

$$S \quad \longrightarrow \quad \mathbb{P}(E)$$

Definizione.

Sia E un fibrato vettoriale complesso su una varietà M. La sua *proiettivizzazione* è il fibrato $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow M$ con fibra lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(E)_p = \mathbb{P}(E_p)$.

Anche su $\mathbb{P}(E)$ si ha un fibrato universale

$$S \longrightarrow \mathbb{P}(E)$$

e un fibrato quoziente Q

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \pi^{-1}E \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Proposizione.

Consideriamo $\rho : E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale complesso di rango n e il suo proiettivizzato $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow M$. Esistono uniche delle classi di coomologia $c_i(E) \in H^{2i}(M)$ tali che

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = \frac{H^*(M)[x]}{(x^n + c_1(E)x^{n-1} + \ldots + c_n(E))}, \qquad x \longleftrightarrow e(S)$$

Proposizione.

Consideriamo $\rho : E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale complesso di rango n e il suo proiettivizzato $\pi : \mathbb{P}(E) \longrightarrow M$. Esistono uniche delle classi di coomologia $c_i(E) \in H^{2i}(M)$ tali che

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = \frac{H^*(M)[x]}{(x^n + c_1(E)x^{n-1} + \ldots + c_n(E))}, \qquad x \longleftrightarrow e(S)$$

Le classi $c_1(E), \ldots, c_n(E)$ sono le *classi di Chern* di E.

La classe

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots + c_n(E) \in H^*(M)$$

è la *classe di Chern totale*.

La classe

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots + c_n(E) \in H^*(M)$$

è la *classe di Chern totale*.

- $c(f^{-1}E) = f^*c(E)$.

La classe

$$c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots + c_n(E) \in H^*(M)$$

è la *classe di Chern totale*.

- $c(f^{-1}E) = f^* c(E)$.
- $c(E \oplus F) = c(E)c(F)$.

Definizione.

Sia k un intero positivo, la *Grassmanniana complessa* degli $(n-k)$-piani è l'insieme

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) = \{\Lambda \subseteq \mathbb{C}^n \mid \Lambda \text{ sottospazio vettoriale di codimensione } k\}$$

Definizione.

Sia k un intero positivo, la *Grassmanniana complessa* degli $(n-k)$-piani è l'insieme

$\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) = \{\Lambda \subseteq \mathbb{C}^n \mid \Lambda \text{ sottospazio vettoriale di codimensione } k\}$

Identifichiamo

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$$

Definizione.

Sia k un intero positivo, la *Grassmanniana complessa* degli $(n-k)$-piani è l'insieme

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) = \{\Lambda \subseteq \mathbb{C}^n \mid \Lambda \text{ sottospazio vettoriale di codimensione } k\}$$

Identifichiamo

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) = \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)}$$

Questo dà alla Grassmanniana la struttura di varietà.

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

dove

$$S = \{(\Lambda, v) \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^n \mid v \in \Lambda\}$$

è il fibrato universale e Q è il fibrato quoziente.

Proposizione.

La coomologia della Grassmanniana $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ è data da

$$H^*(\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)) = \frac{\mathbb{R}[c_1(S), \dots, c_{n-k}(S), c_1(Q), \dots, c_k(Q)]}{(c(S)c(Q) - 1)}$$

Proposizione.

La coomologia della Grassmanniana $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ è data da

$$H^*(\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)) = \frac{\mathbb{R}[c_1(S), \ldots, c_{n-k}(S), c_1(Q), \ldots, c_k(Q)]}{(c(S)c(Q) - 1)}$$

$H^*(\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n))$ è generata dalle classi di Chern del fibrato quoziente Q.

Proposizione.

Siano M una varietà di tipo finito e k un intero positivo. Per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande ogni fibrato vettoriale complesso $\pi : E \longrightarrow M$ di rango k ammette una mappa $f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$.

Proposizione.

Siano M una varietà di tipo finito e k un intero positivo. Per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande ogni fibrato vettoriale complesso $\pi : E \longrightarrow M$ di rango k ammette una mappa $f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$.

$f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ si dice *mappa classificante* per E. Si ha una funzione surgettiva

$$\alpha : [M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)] \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(M; \mathbb{C})$$

Lemma.

Siano $\pi : E \longrightarrow M$ un fibrato vettoriale complesso di rango k su una varietà di tipo finito. Esiste un insieme finito di sezioni $\{s_1, \ldots, s_n\}$ tali che $\{s_1(p), \ldots, s_n(p)\}$ è un insieme di generatori della fibra E_p per ogni $p \in M$.

Dimostrazione (1).

- $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ l'insieme delle sezioni date dal Lemma.

Dimostrazione (1).

- $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ l'insieme delle sezioni date dal Lemma.
- V spazio vettoriale complesso con base $\mathcal{S}$.

Dimostrazione (1).

- $\mathcal{S} = \{s_1, \ldots, s_n\}$ l'insieme delle sezioni date dal Lemma.
- V spazio vettoriale complesso con base $\mathcal{S}$.
- Si hanno delle mappe di valutazione surgettive

$$\mathrm{ev}_p : \mathbb{C}^n \longrightarrow E_p$$

per ogni $p \in M$.

Dimostrazione (2).

- $\ker \mathrm{ev}_p \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$, quindi $E_p \cong \mathbb{C}^n / \ker \mathrm{ev}_p$ è isomorfo a una fibra del fibrato quoziente Q su $\ker \mathrm{ev}_p$.

Dimostrazione (2).

- $\ker \mathrm{ev}_p \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$, quindi $E_p \cong \mathbb{C}^n / \ker \mathrm{ev}_p$ è isomorfo a una fibra del fibrato quoziente Q su $\ker \mathrm{ev}_p$.
- Definiamo la mappa

$$f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$$

tale che $f(p) = \ker \mathrm{ev}_p$.

Dimostrazione (2).

- $\ker \mathrm{ev}_p \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$, quindi $E_p \cong \mathbb{C}^n / \ker \mathrm{ev}_p$ è isomorfo a una fibra del fibrato quoziente Q su $\ker \mathrm{ev}_p$.
- Definiamo la mappa
$$f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$$
tale che $f(p) = \ker \mathrm{ev}_p$.
- Per costruzione E è isomorfo a $f^{-1}Q$. $\square$

Per n sufficientemente grande $[f]$ è unica, qundi

$$\alpha : [M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)] \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(M; \mathbb{C})$$

è iniettiva.

Per n sufficientemente grande $[f]$ è unica, qundi

$$\alpha : [M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)] \longrightarrow \mathrm{Vect}_k(M; \mathbb{C})$$

è iniettiva.

Teorema.

Siano M una varietà di tipo finito e k un intero positivo. Per $n \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande si ha una una corrispondenza biunivoca tra $\mathrm{Vect}_k(M; \mathbb{C})$ e $[M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)]$.

Teorema.

Ogni trasformazione naturale tra i funtori $\mathrm{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C})$ e $H^*(\bullet)$ nella categoria delle varietà di tipo finito è esprimibile come un polinomio nelle classi di Chern.

Dimostrazione.

- $T : \mathrm{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(\bullet)$.

Dimostrazione.

- $T : \mathrm{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(\bullet)$.
- $\pi : E \longrightarrow M$.

Dimostrazione.

- $T : \mathrm{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(\bullet)$.
- $\pi : E \longrightarrow M$.
- Esiste una mappa classificante $f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$, dove Q è il fibrato quoziente su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$.

Dimostrazione.

- $T : \mathrm{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(\bullet)$.
- $\pi : E \longrightarrow M$.
- Esiste una mappa classificante $f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$, dove Q è il fibrato quoziente su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$.
- Esiste un polinomio P_T tale che

$$T(Q) = P_T(c_1(Q), \ldots, c_k(Q))$$

Dimostrazione.

- $T : \mathrm{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C}) \longrightarrow H^*(\bullet)$.
- $\pi : E \longrightarrow M$.
- Esiste una mappa classificante $f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$, dove Q è il fibrato quoziente su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$.
- Esiste un polinomio P_T tale che

$$T(Q) = P_T(c_1(Q), \ldots, c_k(Q))$$

- Applicando f^*

$$T(E) = f^*T(Q) = P_T(c_1(E), \ldots, c_k(E))$$

$\square$

$\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ tramite l'inclusione sulle prime n coordinate. Questa induce un'inclusione $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^{n+1})$ tra le Grassmanniane.

$\mathbb{C}^n \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ tramite l'inclusione sulle prime n coordinate. Questa induce un'inclusione $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^{n+1})$ tra le Grassmanniane.

Definizione.

Sia k un intero positivo. La *Grassmanniana complessa infinita* è lo spazio topologico dato dall'unione

$$\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$$

con topologia debole indotta dalle inclusioni ($A \subseteq \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è aperto se e solo se $A \cap \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ è aperto in $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^n)$ per ogni n).

In modo analogo si ha un fibrato quoziente Q su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$: la fibra su un elemento $\Lambda \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è il k-spazio vettoriale $\mathbb{C}^\infty/\Lambda$.

In modo analogo si ha un fibrato quoziente Q su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$: la fibra su un elemento $\Lambda \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è il k-spazio vettoriale $\mathbb{C}^\infty/\Lambda$.

Proposizione.

Siano M una varietà e k un intero positivo. Ogni fibrato vettoriale complesso $\pi : E \longrightarrow M$ di rango k ammette una mappa $f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$.

In modo analogo si ha un fibrato quoziente Q su $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$: la fibra su un elemento $\Lambda \in \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è il k-spazio vettoriale $\mathbb{C}^\infty/\Lambda$.

Proposizione.

Siano M una varietà e k un intero positivo. Ogni fibrato vettoriale complesso $\pi : E \longrightarrow M$ di rango k ammette una mappa $f : M \longrightarrow \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ tale che $E \cong f^{-1}Q$.

Teorema.

Siano M una varietà e k un intero positivo. Si ha una corrispondenza biunivoca tra $\mathrm{Vect}_k(M;\mathbb{C})$ e $[M, \mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)]$.

Teorema.

La coomologia della Grassmanniana infinita $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è data da

$$H^*(\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)) = \mathbb{R}[c_1(Q), \dots, c_k(Q)]$$

Teorema.

La coomologia della Grassmanniana infinita $\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)$ è data da

$$H^*(\mathcal{G}_k(\mathbb{C}^\infty)) = \mathbb{R}[c_1(Q), \dots, c_k(Q)]$$

Teorema.

Ogni trasformazione naturale tra i funtori $\mathrm{Vect}_k(\bullet; \mathbb{C})$ e $H^*(\bullet)$ nella categoria delle varietà è esprimibile come un polinomio nelle classi di Chern.

Grazie per l'attenzione

Leonardo Migliorini